D-MATH | Algebra I + II | HS20 + FS21
Prof. Einsiedler, Prof. Burger

Probeprüfung

Bemerkung: Diese Probeprüfung ist etwas zu lang konzipiert. Die Prüfung wird ungefähr 9 Fragen vom nachfolgenden Typ enthalten. Des Weiteren wird die Prüfung auch noch Multiple-Choice-Fragen wie in den, während des Semesters regelmässig stattgefundenen, Quizzes enthalten. Dabei wird es höchstens 9 Teilfragen geben, die gemeinsam in Punkten höchstens in etwa zwei Fragen vom nachfolgenden Typ entsprechen. Es wird keine Lösung zu dieser Probeprüfung veröffentlicht, da Sie die meisten Aufgaben mittels der Vorlesungsmitschrift und den Übungen beantworten können. Sie dürfen die Aufgaben im Forum gemeinsam besprechen.

1. Zeigen Sie, dass falls R ein Integritätsbereich ist, so ist auch $R[X]$ ein Integritätsbereich.

2. Sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe der Ordnung p^m für ein $m \in \mathbb{N}$.
   (a) Zeigen Sie, dass das Zentrum von G nicht-trivial ist. Sie dürfen das Lemma *Fixpunkte von p-Gruppen* verwenden, wenn Sie es richtig formulieren können.
   (b) Zeigen Sie, dass G nilpotent ist.

3. Formulieren Sie den ersten Teil des Klassifikationssatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen. Beschreiben Sie in drei Sätzen die Strategie des Beweises.

4. (a) Sei p eine Primzahl und $r \geqslant 1$. Zeigen Sie für das zyklotomische Polynom Φ_{p^r}, dass
$$\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p\left(X^{p^{r-1}}\right).$$
   (b) Zeigen Sie, dass $\Phi_{p^r}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

5. Definieren Sie den Begriff des euklidischen Rings.

6. Sei $R = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Geben Sie alle Einheiten von $R[X]$ an.

7. (a) Welche Gruppen der Ordnung 8 gibt es bis auf Isomorphie?
   (b) Welche abelschen Gruppen der Ordnung 50 gibt es bis auf Isomorphie?

8. Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ von Grad n und E ein Zerfällungskörper von f. Sei $\alpha \in E$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass $[K(\alpha) : K] = n$ genau dann, wenn f irreduzibel ist.

9. Definieren Sie den Begriff eines separablen Polynoms. Geben Sie ein Beispiel und ein Gegenbeispiel an.

10. Formulieren Sie den Galoiskorrespondenzsatz, welcher einen Bezug zwischen Untergruppen der Galoisgruppe und den Zwischenkörpern der Körpererweiterung herstellt (Teil (1) und (2)).

11. Zeigen Sie, dass $X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

12. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe des Polynoms $X^5 - 20X + 5$ zu S_5 isomorph ist.